

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ –

08.02.2026

CLASA a XI-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: - Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului precizat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

Subiectul I (20 puncte)

a) Se consideră $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$. Arătați că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

b) Dacă $X \in M_n(\mathbb{R})$ și $\det X > 0$, arătați că $\det(X - I_n + X^{-1}) \geq 0$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \det(A^2 + B^2) &= \det[(A + iB)(A - iB)] = \det(A + iB) \cdot \det(A - iB) = \\ \text{a)} \quad &= \det(A + iB) \cdot \overline{\det(A + iB)} = \det(A + iB) \cdot \overline{\det(A + iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Dacă $X \in M_n(\mathbb{R})$ și $\det X > 0$ atunci X este nesarabilă, deci X este inversabilă, adică există $X^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$. Mai mult,

$$\begin{aligned} \det X \cdot \det(X - I_n + X^{-1}) &= \det[X \cdot (X - I_n + X^{-1})] = \det(X^2 - X + I_n) = \\ &= \det\left[\left(X - \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \frac{3}{4}I_n\right] = \det\left[\left(X - \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2\right] \end{aligned}$$

Verificăm că $\left(X - \frac{1}{2}I_n\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right) \cdot \left(X - \frac{1}{2}I_n\right)$ și atunci din a) avem că

$$\det\left[\left(X - \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2\right] \geq 0, \text{ deci } \det X \cdot \det(X - I_n + X^{-1}) \geq 0. \text{ Cum din ipoteză avem că}$$

$\det X > 0$ obținem că $\det(X - I_n + X^{-1}) \geq 0$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $\det(A^2 + B^2) = \det[(A + iB)(A - iB)]$	2p
$\det[(A + iB)(A - iB)] = \det(A + iB) \cdot \det(A - iB)$	2p
$\det(A + iB) \cdot \det(A - iB) = \det(A + iB) \cdot \overline{\det(A + iB)}$	2p
$\det(A + iB) \cdot \overline{\det(A + iB)} = \det(A + iB) \cdot \det(\overline{A + iB})$	2p
$\det(A + iB) \cdot \overline{\det(A + iB)} = \det(A + iB) ^2 \geq 0$	2p
b) $X \in M_n(\mathbb{R})$ și $\det X > 0$ atunci X este nesingulară, deci X este inversabilă, adică există $X^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$	1p
$\det X \cdot \det(X - I_n + X^{-1}) = \det[X \cdot (X - I_n + X^{-1})] = \det(X^2 - X + I_n)$	3p
$\det(X^2 - X + I_n) = \det\left[\left(X - \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \frac{3}{4}I_n\right]$	2p
$\det\left[\left(X - \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \frac{3}{4}I_n\right] = \det\left[\left(X - \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2\right]$	1p
Verifică că $\left(X - \frac{1}{2}I_n\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right) \cdot \left(X - \frac{1}{2}I_n\right)$	1p
Folosește a) și arată că $\det X \cdot \det(X - I_n + X^{-1}) = \det\left[\left(X - \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2\right] \geq 0$	1p
Cum, din ipoteză, avem că $\det X > 0$ obținem că $\det(X - I_n + X^{-1}) \geq 0$.	1p
Total	20p

Subiectul II (20 puncte)

Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^3 = A^2$ și $A + B = I_n$. Să se arate că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

Soluție:

Înmulțim relația $A + B = I_n$ la stânga cu matricea A și obținem $A^2 + AB = A$, relație pe care o înmulțim la dreapta cu AB și vom avea $A^3B + (AB)^2 = A^2B$. Dar $A^3 = A^2$, deci $A^3B = A^2B$, de unde $(AB)^2 = O_2$.

Atunci $I_n = I_n - (AB)^2 = (I_n + AB)(I_n - AB)$. Cum și $(I_n - AB)(I_n + AB) = I_n$, avem că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Înmulțește la stânga $A + B = I_n$ cu matricea A și obținem $A^2 + AB = A$.	3p
Înmulțește apoi la dreapta cu AB și obține $A^3B + (AB)^2 = A^2B$.	4p
Arată că $(AB)^2 = O_2$	5p
Arată că $I_n = (I_n + AB)(I_n - AB)$	4p
Verifică că $(I_n - AB)(I_n + AB) = I_n$	2p
Trage concluzia că $I_n + AB$ este inversabilă	2p
Total	20p

Subiectul III (25 puncte)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $a_1 = \sqrt{2005}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2005}{2006}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Arătați că $1 \leq a_n \leq 2005$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir monoton.
- Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$.

Soluție:

a) Demonstrează prin inducție matematică că $1 \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 iar apoi că $a_n \leq 2005$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare $1 \leq a_n \leq 2005$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$b) \text{ Calculează } a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 2005}{2006} - a_n = \frac{a_n^2 - 2006a_n + 2005}{2006} = \frac{(a_n - 2005)(a_n - 1)}{2006}$$

Din a) avem că $1 \leq a_n \leq 2005$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare $a_{n+1} - a_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir descrescător.

c) Din a), cum $1 \leq a_n \leq 2005$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir mărginit, iar din b) avem că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir descrescător, prin urmare conform Teoremei lui Weierstrass avem că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$. Trecem la limită în relația de recurență și obținem $l = \frac{l^2 + 2005}{2006}$, de unde $l = 1$ sau $l = 2005$. Dar $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir descrescător și $1 \leq a_n \leq 2005$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $l = 1$.

Pentru a calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$ vom folosi lema lui Stolz -Cesaro.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}}.$$

Cum șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir descrescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, avem că $\left(\frac{1}{a_n - 1} \right)_{n \geq 1}$ este un șir monoton

crescător și nemărginit, deci putem aplica lema Stolz -Cesaro.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}-1} - \frac{1}{a_n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1}-1)(a_n-1)}{a_n - a_{n+1}} = \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1}-1)(a_n-1)}{(a_n-2005)(a_n-1)} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1}-1)}{(a_n-2005)} \cdot \frac{2006}{2006} \end{aligned}$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = 0$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Demonstrează prin inducție matematică că $1 \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$	3p
Demonstrează prin inducție matematică că $a_n \leq 2005, \forall n \in \mathbb{N}^*$	3p
b) Arată că $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 2005)(a_n - 1)}{2006}$	3p
Demonstrează că $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir descrescător.	2p
c) Arată că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent cu limita $l = 1$ sau $l = 2025$	3p
Justifică că $l = 1$	2p
$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}}$	1p
Arată că se poate aplica Lema Stolz -Cesaro	2p
Arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)}{(a_n - 2005)} \cdot \frac{2006}{2006}$	4p
Justifică că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = 0$.	2p
Total	25p

Subiectul IV (25 puncte)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n$.

Soluție:

a) Avem $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Adunând cele n inegalități

obținem $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, aplicând criteriul

cleștelui obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n - 1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + a_n - 1)^{\frac{1}{a_n-1}} \right]^{n(a_n-1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n-1)}$.

Dar

$$\begin{aligned} n(a_n - 1) &= n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} - 1 \right) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2+k}} - n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+k}} - 1 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n - \sqrt{n^2+k}}{\sqrt{n^2+k}} = \sum_{k=1}^n \frac{-k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \end{aligned}$$

Au loc inegalitățile:

$$\frac{k}{(n + \sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{k}{(n + \sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Adunând cele n inegalități obținem

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(n + \sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n + \sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n k}{(n + \sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n k}{(n + \sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}}$$

Cum $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, obținem

$$\frac{n(n+1)}{2(n+\sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+\sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n(n+1)}{2(n+\sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{n(n+1)}{2(n+\sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{-k}{(n+\sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \geq -\frac{n(n+1)}{2(n+\sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}}.$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n(n+1)}{2(n+\sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n(n+1)}{2(n+\sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}} \right) = -\frac{1}{4},$ aplicând

criteriul cleștelui obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{-k}{(n+\sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \right) = -\frac{1}{4},$ deci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = e^{-\frac{1}{4}}$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Arată că $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$	4p
Arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$	4p
Aplică criteriul cleștelui și obține $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.	2p
b) Arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)}$	1p
Arată că $n(a_n - 1) = \sum_{k=1}^n \frac{-k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}}$	3p
Folosește inegalitățile $\frac{k}{(n + \sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{k}{(n + \sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}}, \forall k = \overline{1, n}$	2p
Arată că $-\frac{n(n+1)}{2(n + \sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{-k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \geq -\frac{n(n+1)}{2(n + \sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}}$	3p
Arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n(n+1)}{2(n + \sqrt{n^2+n})\sqrt{n^2+n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n(n+1)}{2(n + \sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}} \right) = -\frac{1}{4}$	4p
Folosește criteriul cleștelui și obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{-k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} \right) = -\frac{1}{4}$	1p
Arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = e^{-\frac{1}{4}}$	1p
Total	25p